Steiner System とAssociation-Scheme (有限群論とその周辺)

芳沢, 光雄

数理解析研究所講究録
424巻 1981年 70-74

Steiner system と association-scheme

慶応大学　　芳沢 光雄

代数的組合せ論の基本的概念である association-scheme をみたす Steiner system について得られたいくつかの結果を述べる。

定義 association-scheme

X: finite set, $R_i\,(i=0,\cdots,d) \subset X\times X$ が次の条件をみたすとき、X と $\{R_0,\cdots,R_d\}$ の組を d-class の association-scheme という。

(i) $\exists l\,;\ R_l=\{(x,x)\mid x\in X\}$

(ii) $X\times X = R_0\cup R_1\cup\cdots\cup R_d$

(iii) $R_i={}^tR_i:=\{(y,x)\mid (x,y)\in R_i\}\quad (i=0,\cdots,d)$

(iv) $i,j,h\in\{0,\cdots,d\}$ を任意に fix したとき、

$|\{z\in X\mid (x,z)\in R_i,\ (y,z)\in R_j\}|$ は $(x,y)\in R_h$ のもとで、

x,y のとり方によらず一定 $(=\mu(i,j,h))$.

association-scheme の例については、[1] を参照。

定義 Steiner system

Ω: finite set, $|\Omega|=v$, $\mathbb{B}\subset\Omega^{(k)}$, $1<t<k<v$ のとき、

$(\Omega, \mathbb{B})$ が Steiner system $S(t,k,v)$.

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\overset{\forall}{\alpha_1}, \underset{\neq}{\cdots}, \overset{\forall}{\alpha_t} \in \Omega$ に対し、$\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ を含む $\mathbb{B}$ の元がただ1つある。

Ω の元を point, $\mathbb{B}$ の元を block という。

Steiner system の例については [6], [7] 等を参照.

association-scheme をみたす Steiner system は、association-scheme の導入の仕方によって色々と変わるのであるが (see [4]), ここでは最も一般的な次の方法をとることにする。

定義　$S(t,k,v)$ が block-schematic

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $X = \mathbb{B}$,　$x, y \in X$ に対し $(x,y) \in R_i \leftrightarrow |x \cap y| = i$ $(i = 0, \cdots, k)$ と

約束するとき、$X, \{R_0, \cdots, R_k\}$ が association-scheme をなす。

尚、現在までに知られている block-schematic Steiner system は、次のものである。

$S(2,k,v)$, $S(3,4,8)$, $S(3, n+1, n^2+1)$ $(n:\text{even})$,

$S(3,6,22)$, $S(4,7,23)$, $S(5,8,24)$, $S(4,5,11)$, $S(5,6,12)$.

$S(2,k,v)$ が block-schematic であることは [3] で示されていることに注意する。その他のものは自己同型群 (後例の場合はマシュー群) などを考えれば block-schematic であることが分る。

さて一般的な研究方法として、次のようなことを考える。

$S(t,k,v)$ に対して、$\mathbb{B} = \{B_1, \cdots, B_{\lambda_0}\}$ としたとき、$\lambda_0 \times \lambda_0$ 行列 A_h $(0 \leq h \leq k)$ (h-adjacency matrix) を次のように定める。

$A_h(i,j) = 1$ if $|B_i \cap B_j| = h$, 0 otherwise.

$S(t,k,v)$ が block-schematic ならば、$A_i A_j = \sum_{h=0}^{k} \mu(i,j,h) A_h$ $(0 \leq i, j \leq k)$ である。

ある fix した block と i 点で交わる blocks 数を x_i とするとき、λ_0 次ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ は x_i に対する A_i の固有ベクトルである。

$\alpha \underset{\neq}{,} \beta \in \Omega$ に対して、λ_0 次ベクトル a_α を $a_\alpha(i) = 1$ if $\alpha \in B_i$, $= 0$ if $\alpha \notin B_i$, λ_0 次ベクトル a_β も同様に定めれば、$a_\alpha - a_\beta$ も A_i の固有ベクトルになり $(i=0,\cdots,k)$、対応する固有値を d_i とすれば、$\sum_{h=0}^{t-1} \binom{h}{l} d_h + \binom{k}{l} = \binom{k-1}{l-1}(\lambda_l - \lambda_{l+1})$ $(l=0,\cdots,t-1)$ が成り立つ。

以上のことおよび blocks に関する整数条件 (see [7]) などを使って以下の結果を得た。ここで次の Th.1 に関しては、より一般的な形まで (t-(v,k,λ) design) 拡張されている (see [8])。

Th.1 $^\forall n \in N$ に対して、$k-t=n$ となる block-schematic $S(t,k,v)$ $(t \geq 3)$ は有限個。

Th.2 [5] $S(t,t+1,v)$ が block-schematic
$\Leftrightarrow$ (i) $t=2$, (ii) $t=3$, $v=8$, (iii) $t=4$, $v=11$ or (iv) $t=5$, $v=12$.

Th.3 [5] $S(t,t+2,v)$ が block-schematic
$\Rightarrow$ (i) $t=2$, (ii) $t=3$, $v=17$ or (iii) $t=3,4\cdots$ or 8, $v=t+23$.

Th.4 [5] $S(t,t+3,v)$ が block-schematic
$\Rightarrow$ (i) $t=2$, (ii) $t=3,4$ or 5, $v=t+19$ or (iii) $t=6$ or 8, $v=t+39$.

尚、Th.2,3,4 を得るにあたっては計算機を使用しており、$k-t$ の値が増えるに従って、計算時間は(最後の整数条件で)急速に増えた。

ここでTh.2は必要十分条件の形で示されているが、Th.3,4については必要条件の形で示されている。これはtが小さいところでは、intersection matrices ($\mu(\lambda,\sigma,h)$たちから成る行列)が矛盾なく求められ、又、tが大きくなると、intersection matricesも計算機を使っても求められそうにないことからである。(勿論、Th.3,4の(iii)についての話である。)

さて最後に、Th.1の証明のideaを使って次のTh.を得た。

Th.5 [10] 次のような条件をみたすdistance-regular graph Γはない。

$$\left\{\begin{array}{l} k_d < k \text{ であり、次の(i),(ii),(iii) のどれかをみたす。} \\ \text{(i) } d:\text{odd},\ g \geqq d \geqq 7 \\ \text{(ii) } d:\text{odd},\ g \geqq d-1 \geqq 28 \\ \text{(iii) } d:\text{even},\ g \geqq d \geqq 28. \end{array}\right.$$

記号等については[2]を参照。又、このTh.5の条件をもう少し変えるといくつか例があることを述べておく。

例：正十二面体の点と辺についてのグラフは、

$k=3,\ d=5,\ k_d=1,\ g=5.$

参考文献

[1] 坂内英一：代数的組合せ論，数学31 (1979) 126-143.

[2] N. Biggs : Algebraic graph theory, Camb. Univ. Press (1974).

[3] R. Bose : Strongly regular graphs, partial geometries, and partially balanced designs, Pacific J. Math. 13 (1963), 389-419.

[4] P. Cameron : Two remarks on Steiner systems, Geometriae Dedicata 4 (1975) 403-418.

[5] H. Enomoto and M. Yoshizawa : On block-schematic Steiner systems $S(t, t+2, v)$ and $S(t, t+3, v)$ (to appear)

[6] C. Lindner and A. Rosa : Topics on Steiner systems, North-Holland (1980)

[7] 永尾 汎 : 群とデザイン, 岩波 (1974).

[8] M. Yoshizawa : Block intersection numbers of block-designs, (to appear in Osaka J. Math.)

[9] 〃 : On block-schematic Steiner systems $S(t, t+1, v)$.

[10] 〃 : On some distance regular graphs, (to appear in Disc. Math)